O TEOREMA DE HINDMAN

Matheus Barros da Silveira, Yuri Gomes Lima

O conceito de limite pode ser caracterizado por uma aplicação lim: E → ℝ onde E é o conjunto das sequências reais para as quais o limite existe. Tal aplicação é um funcional linear unitário invariante pela aplicação shift. Podemos generalizar os limites através do conceito de p-limites. Estes são funcionais lineares unitários p-lim, do conjunto das sequências reais limitadas no conjunto dos reais, que não necessariamente são invariantes pela aplicação shift. Em outro contexto, podemos definir os conceitos de filtro, ultrafiltro e ultrafiltro não-principal, que são famílias de subconjuntos dos naturais satisfazendo determinadas condições. Depois, mostramos a relação entre os dois conceitos: todo p-limite dá origem a um ultrafiltro não-principal e vice-versa. Considerando o conjunto βℕ de todos os ultrafiltros, podemos definir uma operação de soma nele de forma a induzir a inclusão natural ℕ ⊂ βℕ e estender a noção de soma em ℕ. Para tal operação, existem ultrafiltros p tais que p+p=p, isto é, p é idempotente. Finalmente, a existência de ultrafiltros idempotentes nos permite demonstrar o Teorema de Hindman. Este diz que, dada uma partição dos naturais em um número finito de conjuntos, ℕ = A_1 ∪...∪ A_r, algum conjunto A_i é um conjunto IP. Um conjunto IP é tal que ele contém todas as somas finitas de um subconjunto infinito dos naturais. Esse resultado, tal qual outros resultados da Teoria de Ramsey Ergódica, trata de uma propriedade de um conjunto "grande" que não se perde ao particioná-lo em finitas partes. Isto é, alguma das partes ainda é "grande" no contexto de tal propriedade. Nessa apresentação, daremos os detalhes das definições dos conceitos de p-limite e ultrafiltros não-principais, mostraremos a existência de ultrafiltros idempotentes e, com isso, seguiremos com a demonstração do Teorema de Hindman, que segue quase diretamente do resultado anterior. Trabalho financiado pelo CNPq.

Palavras-chave: Teorema de Hindman. Conjuntos IP. Ultrafiltros. p-limite.